Конкурсни задачи за математички натпревари
4 одделение

71. Цифрите на бројот 44444 меѓусебно поврзи ги со знаците на основните математички операции така да добиениот резултат е 19.

Решение. Едно решение е: $4 \cdot 4 + 4 - 4 : 4 = 16 + 4 - 1 = 19$.

72. Во три продавници пристигнало исто количество од една стока. Кога секоја продавница ќе продаде по $14kg$ од таа стока, тогаш во сите три продавници заедно останува толку стока колку што е донесено во една од продавниците. Колку стока е донесено во секоја продавница?

Решение. Бидејќи после продажбата во сите три продавници останало онолку стока колку што е донесено во една продавница, непродадената стока изнесува една третина од стоката која стигнала во продавницата. Значи продадено е две третини од стоката, што изнесува $14kg$. Конечно, една третина од стоката е $7kg$, а целата стока која пристигнала во продавницата е $7 \cdot 3\ kg = 21\ kg$.

5 одделение

73. Пет момчиња се мерат на вага по двајца во сите можни комбинации. Вагата ги покажала следните маси: $72\,kg$, $75\,kg$, $76\,kg$, $77\,kg$, $78\,kg$, $80\,kg$, $81\,kg$, $82\,kg$, $85\,kg$ и $86\,kg$. Колкава е вкупната маса на сите пет момчиња?

Решение.Прв начин. Секое момче се мерело по еднаш со останатите четири момчиња, што значи дека во дадените десет маси масата на секое момче се јавува четири пати. Ако ги собереме дадените маси, тогаш во збирот четири пати ќе учествуваат масите на петте момчиња. Според тоа, масата на петте момчиња е четвртина од пресметаниот збир.

Значи, ако x е масата на петте момчиња, тогаш

$$x = (72 + 75 + 76 + 77 + 78 + 80 + 81 + 82 + 85 + 86) : 4 = 792 : 4 = 198kg .$$

Втор начин. Нека со x, y, z, u, v ги означиме масите соодветно на првото, второто, третото, четвртото и петтото момче. Тогаш, од условот на задачата имаме

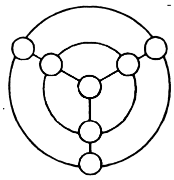
$$x + y = 72 ,\ y + z = 75 ,\ z + u = 76 ,\ u + v = 77 ,\ v + x = 78 ,$$

$$x + z = 80 ,\ y + u = 81 ,\ z + v = 82 ,\ u + x = 85 ,\ v + y = 86 .$$

Ако ги собереме овие 10 равенки ќе добиеме

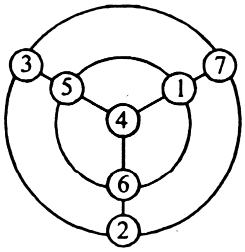
$$4(x + y + z + u + v) = 792 .$$

Па, петте момчиња имаат вкупно $x + y + z + u + v = 198\ kg$.



74. Во секое од кругчињата стави по еден од броевите од 1 до 7, во секое кругче по еден број, така што збирот на броевите на секој радиус и на секоја кружница е еднаков.

Решение. Збирот на броевите од 1 до 7 е 28. Бидејќи збировите на броевите запишани на кружниците мора да се еднакви, а имаме две кружници заклучуваме дека во централното кругче треба да запишеме парен број. Но, збировите на броевите запишани на радиусите мора да се еднакви, па затоа мора да се еднакви и збировите на радиусите без бројот запишан во централното кругче. Вакви збирови имаме три. Според тоа, кога од бројот 28 го извадиме бројот запишан во централното кругче добиениот број мора да се дели со 3. Меѓу броевите 28-2=26, 28-4=24 и 28-6=22 единствено бројот 24 се дели со 3. Значи, во централното кругче треба да го запишеме бројот 4.



Според тоа, збирот на броевите запишани на кружниците и на радиусите е 12. Значи, на секој од радиусите треба да запишеме уште по два броја чиј збир е еднаков на 8. Јасно, броевите 1 и 7, 5 и 3, 2 и 6 се наоѓаат на исти радиуси. Но, броевите 6 и 7 мора да се наоѓаат на различни кружници, што важи и за броевите 5 и 7. Конечно, на едната кружница се наоѓаат броевите 1, 5 и 6, а на другата броевите 2, 3 и 7, (види цртеж).

6 одделение

75. Дамјан има повеќе од 3000, помалку од 4000 денари. Ако дневно троши по 200 или 240 денари, секогаш ќе му останат 50 денари. Колку пари има Дамјан?

Решение.Број кој при делење со 200 и 240 дава остаток 50 е од видот $ab+50$, каде $b=\text{НЗС}(200,240)=1200$. Значи, бараниот број е од видот $1200a+50$, каде $a\in\mathbb{N}$ и како тој се наоѓа меѓу 3000 и 4000 добиваме дека тоа е бројот 3650.

76. Еден извиднички одред има повеќе од 40, а помалку од 50 членови. Пред да тргнат на логорување забележале дека можат да се сместат или во четирикреветни или во шесткреветни шатори при што и во едниот и во другиот случај нема да остане празно место. Колку извидници брои одредот?

Решение. Од условот на задачата заклучуваме дека бројот на извидниците во одредот се дели со 4 и со 6. Бидејќи НЗС(4,6)=12 добиваме дека тој број е 12k, каде k е природен број. Во одредот има повеќе од 40, а помалку од 50 членови па затоа 40<12k<50. Ова е можно за k=4, т.е. бројот на извидниците е $12\cdot 4=48$.

7 одделение

77. Одреди ги сите природни броеви a и b за кои броевите $x=\frac{2a+b}{3b+2}$, $y=\frac{3b+2}{8}$ и $z=\frac{8}{2a+b}$ се природни броеви.

Решение. Не е тешко да се провери дека е исполнето равенството $xyz=1$, и бидејќи $x,y,z\in\mathbb{N}$ добиваме дека $x=y=z=1$.

Според тоа, од $y=1$ добиваме $\frac{3b+2}{8}=1$, т.е. $3b+2=8$. Од последната равенка имаме $b=2$. Од друга страна пак, од $z=1$ добиваме $\frac{8}{2a+b}=1$, т.е. $2a+b=8$. Од добиената равенка имаме $a=3$. Сега не е тешко да се види дека и $x=1$ (за добиените вредности за a и b).

Значи, бараните броеви се $a=3$ и $b=2$.

78. Нека A е четирицифрен број, а B е бројот што се добива кога во A првата и последната цифра ќе си ги заменат местата. Одреди ги броевите A и B, ако нивниот најголем заеднички делител е 63.

Решение. Нека $A=\overline{abcd}$ и $B=\overline{dbca}$. Тогаш мора $A\neq B$, затоа што во спротивно најголемиот заеднички делител на A и B ќе биде четирицифрен број.

Да претпоставиме дека $A>B$ и да ја разгледаме разликата на броевите

$$A-B=1000a+100b+10c+d-1000d-100b-10c-a=999(a-d).$$

Од особините на деливост добиениот број треба да се дели со 63, а бидејќи $999=9\cdot 111$, тогаш мора $7|(a-d)$. Според тоа можно само ако $a=9,d=2$ или $a=8,d=1$. Двата случаи ќе ги разгледаме одвоено.

Случај 1. Нека $a=9,d=2$. Броевите се $\overline{9bc2}=9002+10(10b+c)$ и $\overline{2bc9}=2009+10(10b+c)$, па 9002 и 2009 се делат со 7, а при делење со 9 даваат остаток 2. Значи $\overline{bc0}=10(10b+c)$, т.е. $\overline{bc}$ треба да се дели со 7, а при делење со 9 треба да има остаток 7. Според тоа мора $b=0,c=7$ или $b=7,c=0$.

За $b=0,c=7$ се добиваат броевите $9072=63\cdot 144$ и $2079=63\cdot 33$, но $НЗД(144,33)=3$, па најголемиот заеднички делител на 9072 и 2079 не е 63.

Ако, пак, $b=7,c=0$ се добиваат броевите $9702=63\cdot 154$ и $2709=63\cdot 43$ и $НЗД(154,43)=1$, па бараните броеви се 9702 и 2709.

Случај 2. Нека $a=8,d=1$. Броевите 8001 и 1008 се делат со 63, па мора $\overline{bc}$ да е број делив со 63 т.е. $b=c=0$ или $b=6,c=3$.

Ако $b=c=0$, тогаш $8001=63\cdot 127$ и $1008=63\cdot 16$ и $НЗД(127,16)=1$, па бараните броеви се 8001 и 1008.

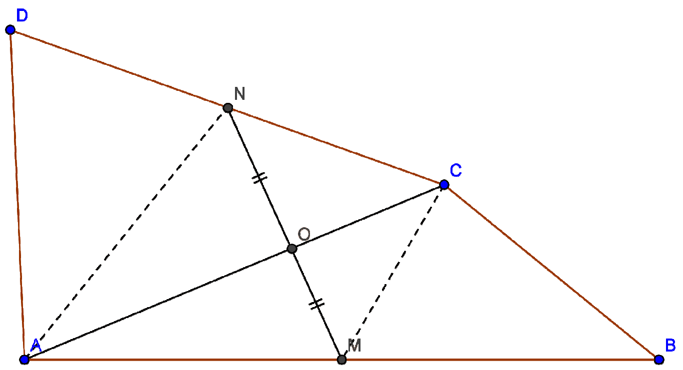
Ако, пак, $b=6,c=3$, броевите се $8631=63\cdot 137$ и $1638=63\cdot 26$ и $НЗД(137,26)=1$, а бараните броеви се 8631 и 1638.

Конечно сите броеви A и B се $A=9702$ и $B=2709$, $A=8001$ и $B=1008$ и $A=8631$ и $B=1638$.

8 одделение

79. Даден е четириаголник $ABCD$. Отсечката која ги сврзува средините на страните AB и CD, со дијагоналата AC е поделена на два еднакви дела. Докажи дека $P_{\Delta ABC}=P_{\Delta ADC}$.

Решение. Нека M е средина на AB, а N е средина на CD, а пресечната точка на AC и MN е O (види цртеж). Тогаш триаголниците AMO и AON



имаат иста плоштина, бидејќи $\overline{MO}=\overline{ON}$ и висината спуштена од темето A е еднаква. Слично триаголниците OMC и NOC имаат иста плоштина, па $P_{\Delta ACN}=P_{\Delta AMC}$.

Бидејќи M е средина на AB, а N е средина на CD следува дека $P_{\Delta AMC}=P_{\Delta MBC}$ и $P_{\Delta ACN}=P_{\Delta AND}$ од каде следува дека $P_{\Delta ABC}=P_{\Delta ADC}$.

80. Пресметај го производот

$$101\cdot 10001\cdot 100000001\cdot\ldots\cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{2^n-1}1.$$

Решение. Нека $A=101\cdot 10001\cdot 100000001\cdot\ldots\cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{2^n-1}1$. Тогаш, производот можеме да го запишеме во облик

$$A=(10^2+1)(10^4+1)(10^8+1)\cdot\ldots\cdot(10^{2^n}+1)=$$

$$=\frac{1}{10^2-1}(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)(10^8+1)\cdot\ldots\cdot(10^{2^n}+1)=$$

$$=\frac{1}{99}(10^4-1)(10^4+1)\cdot\ldots\cdot(10^{2^n}+1)=\ldots=\frac{1}{99}(10^{2^{n+1}}-1)=\frac{1}{99}\cdot\underbrace{9\ldots9}_{2^{n+1}}=101010\ldots101.$$

8 одделение_осмолетка

81. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cfrac{\dots}{2013+\cfrac{1}{2014}}}}}}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cfrac{\dots}{2013+\cfrac{1}{2014}}}}}}}$$

Решение. Ја воведуваме ознаката

$$x=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cfrac{\dots}{2013+\cfrac{1}{2014}}}}}$$

и добиваме

$$\frac{1}{2+x}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1}{2+x}+\frac{1}{\frac{1+x+1}{1+x}}=\frac{1}{2+x}+\frac{1+x}{2+x}=\frac{2+x}{2+x}=1.$$

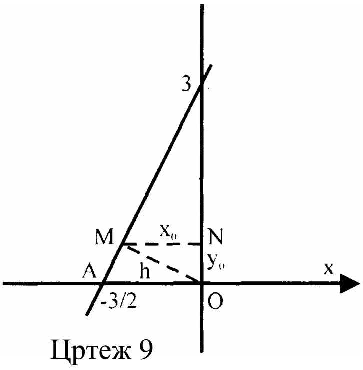
Значи, вредноста на изразот е 1.

82. Во рамнински координатен систем претстави го множеството точки (x,y) чии координати го задоволуваат условот

$$7^{x+y}=7^{x+2}\cdot 7^{2x+1},$$

а потоа одреди ги координатите на точката од тоа множество која е најблиска до координатниот почеток.

Решение. Даденото равенство можеме да го запишеме во видот $7^{x+y}=7^{3x+3}$, од каде што заради $7\neq 1$ добиваме дека $x+y=3x+3$, односно $y = 2x+3$. Значи, бараното множество е права чија равенка е $y = 2x + 3$ (види цртеж).



Цртеж 9

Треба да се определат координатите на точката M, подножјето на нормалата од O на AB. Од ΔOMN можеме да го изразиме најмалото растојание од координатниот почеток до правата AB (тоа е висината $\overline{OM}=h$ во триаголникот AOB) како зависност од координатите x_0 и y_0 на точката M т.е. $h^2=x_0^2+y_0^2$. Бидејќи точката M лежи на правата $y=2x+3$, добиваме дека $y_0=2x_0+3$, па е $h^2=x_0^2+(2x_0+3)^2$, односно $h^2=5x_0^2+12x_0+9$. Значи,

$$h^2 = 5(x_\circ{}^2 + 2 \cdot \tfrac{6}{5} x_\circ + (\tfrac{6}{5})^2 - (\tfrac{6}{5})^2) + 9 = 5(x_\circ + \tfrac{6}{5})^2 + \tfrac{9}{5}. \qquad (1)$$

Бидејќи висината h е најмалото растојание од координатниот почеток до правата AB треба да најдеме x_0 така што h^2 да е најмал. Изразот од десната страна во (1) е минимален ако $x_\circ + \frac{6}{5} = 0$, т.е. $x_\circ = -\frac{6}{5}$. Сега за $y_\circ$ добиваме $y_\circ = -2 \cdot \frac{6}{5} + 3 = \dfrac{3}{5}$ и координатите на точката M се: $x_\circ = -\frac{6}{5}$, $y_\circ = \frac{3}{5}$.